

НЕКОТОРЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ КОНТУРНО-ТЕЛЕСНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ТОНКО ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ*

We prove some local contour-solid theorems for finely holomorphic functions defined on sets of the complex plane that are finely open with nonpolar components.

Доведено деякі локальні контурно-тілесні теореми для тонко голоморфних функцій, заданих на тонко відкритих з неполярним доповненням множинах комплексної площини.

1. Введение. В работах [1, 2] установлены контурно-телесные теоремы соответственно для тонко гипогармонических и тонко голоморфных функций в тонко открытых множествах комплексной плоскости C , являющиеся аналогами результатов работ [3, 4]. В работе [5] были доказаны контурно-телесные теоремы для мероморфных функций в открытых множествах комплексной плоскости C , усиливающие результаты работы [4] за счет учета нулей, полюсов и неоднолистности функций возле нулей и полюсов. В настоящей работе устанавливаются контурно-телесные теоремы для тонко голоморфных функций в тонко открытых с неполярным дополнением множествах комплексной плоскости C , аналогичные некоторым результатам, содержащимся в теоремах работы [5]. При этом в случае, когда дополнение тонко открытого множества неполярно, оценки локальных теорем работы [2] усиливаются за счет учета поведения тонко голоморфных функций возле своих нулей. При получении результатов используются методы, разработанные в [3–5].

2. Основные условия и обозначения. Для множества E , содержащегося в расширенной комплексной плоскости \bar{C} , используем следующие обозначения (см. [1]): $CE := \bar{C} \setminus E$, $b(E)$ — база множества E в \bar{C} , $\tilde{E} := E \cup b(E)$ — тонкое замыкание множества E в \bar{C} , $\bar{\partial}_f E$ — тонкая граница множества E в \bar{C} , $\partial_f E := C \cap \bar{\partial}_f E$, $(E)_i := \tilde{E} \setminus b(E)$ — множество всех тонко изолированных точек множества E , $(E)_l := E \setminus (E)_i$.

Для любого тонко открытого множества G выполнены соотношения $(G)_i = \emptyset$, $b(G) = \tilde{G}$ [6, с. 29].

Для тонко открытого множества $D \subset \bar{C}$ с неполярным дополнением CD при $w \in \bar{C}$, $\zeta \in C$, $w \neq \zeta$, существует тонкая функция Грина $g_D(w, \zeta)$ [7] (данное в [7] определение тонкой функции Грина для $D \subset C$ легко переносится на рассматриваемый случай).

Пусть $D \subset \bar{C}$ — тонко открытое множество. Функция $\varphi: D \rightarrow C$ называется тонко голоморфной, если каждая точка $z \in D$ имеет тонкую окрестность $V \subset D$, компактную в \bar{C} (в стандартной топологии) и такую, что сужение функции φ на множество V принадлежит равномерному замыканию алгебры сужений на множество V функций, голоморфных в открытых окрестностях множества V (см. [8]; в [2] это определение дано неточно).

Функция φ , определенная в открытом множестве $D \subset \bar{C}$, является тонко голоморфной тогда и только тогда, когда она голоморфна в D [8, с. 126].

Более детально тонко голоморфные функции рассмотрены в работах [8–10], а также частично в работе [2].

Пусть \mathcal{M} — класс всех функций $\mu: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, для каждой из кото-

* Выполнена при поддержке INTAS (грант № 99-00089).

рых множество $I_\mu := \{x : \mu(x) > 0\}$ связно и сужение функции $\log \mu(x)$ на I_μ вогнуто относительно $\log x$. Пусть \mathcal{M}^* — класс всех $\mu \in \mathcal{M}$, для которых множество I_μ не пусто. Для $\mu \in \mathcal{M}^*$ через x_μ^- и x_μ^+ обозначим соответственно левый и правый концы промежутка I_μ . Очевидно, $0 \leq x_\mu^- \leq x_\mu^+ \leq +\infty$. Существуют пределы

$$\mu_0 := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \mu(x)}{\log x}, \quad \mu_\infty := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu(x)}{\log x}$$

и выполняются соотношения

$$\mu_0 \geq \mu_\infty, \quad \mu_0 > -\infty, \quad \mu_\infty < +\infty, \quad (1)$$

а если $x_\mu^- > 0$ (аналогично $x_\mu^+ < +\infty$), то положим $\mu_0 = +\infty$ (соответственно $\mu_\infty = -\infty$). Для $\mu \equiv 0$ за μ_0 и μ_∞ можно принять произвольные конечные числа, удовлетворяющие условиям (1). При $\mu_0 < +\infty$ определим целое m_0 условиями $m_0 - 1 < \mu_0 \leq m_0$, а при $\mu_\infty > -\infty$ — целое m_∞ условиями $m_\infty \leq \mu_\infty < m_\infty + 1$.

Классы \mathcal{M} и \mathcal{M}^* рассмотрены в [4]. Когда $\mu(\cdot)$ пробегает класс \mathcal{M} или \mathcal{M}^* , функция $\log \mu(\cdot)$ пробегает соответственно класс L или L^* из работ [1, 3].

Пусть G — тонко открытое множество в \mathbb{C} и $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Для функции $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ введем величины

$$f_{a,G} := \begin{cases} \overline{\lim}_{z \rightarrow a, z \in G} \frac{\log |f(z)|}{\log |z-a|} & \text{при } a \in \partial_f G; \\ 0 & \text{при } a \notin \partial_f G, \end{cases}$$

$$f_{\infty,G} := \begin{cases} \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty, z \in G} \frac{\log |f(z)|}{\log |z|} & \text{при } \infty \in \bar{\partial}_f G; \\ 0 & \text{при } \infty \notin \bar{\partial}_f G. \end{cases}$$

3. Локальные контурно-телесные результаты. Используя локальные результаты для тонко голоморфных и тонко гипогармонических функций из работ [1, 2], получим усиления локальных контурно-телесных теорем для тонко голоморфных функций.

Если f — тонко голоморфная в тонко открытой области $G \subset \mathbb{C}$ функция, то обозначим через $k(f, z)$ кратность ее значения $f(z)$ в точке $z \in G$.

Возможным неопределенным выражениям условимся приписывать следующие значения: $\infty \cdot 0 = 0$, $-\infty + \infty = -\infty$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка, $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ — тонко открытое множество, тонкая граница которого не является полярным множеством. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$, $f: (G \setminus \{a\}) \cap \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — тонко непрерывная функция, ограниченная¹ на каждой ограниченной части множества G , отделимой от точки a , тонко голоморфная в G и удовлетворяющая условию

$$|f(z)| \leq \mu(|z-a|) \quad \forall z \in (\partial_f G) \setminus \{a\}. \quad (2)$$

¹ В теореме 1 работы [2] это условие ограниченности функции f пропущено по недосмотру, но в более общей теореме 2 работы [2] оно содержится.

Обозначим $z_1 := a$, $z_2 := \infty$. Предположим, что при каждом $s = 1, 2$ (независимо друг от друга) для каждой тонко связной компоненты G_j множества G , для которой $z_s \in b(G_j)$, выполняется неравенство

$$f_{z_s, G_j} < +\infty, \quad (3)$$

а если $z_s \notin b(CG_j)$, то предположим дополнительно, что при $z_s = a$

$$\mu_0 < +\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta - a|^{m_0-1}), \quad \zeta \rightarrow a, \quad (4)$$

а при $z_s = \infty$

$$\mu_\infty > -\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta|^{m_\infty+1}), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Пусть $W_0 := \{w \in G : f(w) = 0\}$. Предположим, что для каждой точки $w \in W_0$ существует (обычная) окрестность $V(w)$ такая, что функция

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{k(f, w)}} \text{ ограничена в } (V(w) \cap G) \setminus \{w\}.$$

Тогда

$$|f(\zeta)| \leq \mu(|\zeta - a|) \exp \left[- \sum_{w: w \in W_0} k(f, w) g_G(w, \zeta) \right] \quad \forall \zeta \in G. \quad (6)$$

Для рассматриваемых G , a , f , μ при $s = 1, 2$ введем величины $\sigma^s = \sigma^s(G, a, f, \mu)$, определяемые следующими условиями. Если $\mu \equiv 0$, то считаем $\sigma^1 = \sigma^2 = 0$, а если $\mu \in \mathcal{M}^*$, то положим

$$\sigma^1 := \begin{cases} \left(\frac{f(\cdot)}{\mu(|\cdot - a|)} \right)_{a, G} & \text{при } x_\mu^- = 0; \\ 0 & \text{при } x_\mu^- > 0, \end{cases}$$

$$\sigma^2 := \begin{cases} \left(\frac{f(\cdot)}{\mu(|\cdot|)} \right)_{\infty, G} & \text{при } x_\mu^+ = +\infty; \\ 0 & \text{при } x_\mu^+ < +\infty. \end{cases}$$

Для $\mu \in \mathcal{M}^*$ очевидны следующие соотношения: если $\mu_0 \neq +\infty$, то $\sigma^1 = f_{a, G} + \mu_0$, а если $\mu_\infty \neq -\infty$, то $\sigma^2 = f_{\infty, G} - \mu_\infty$.

Теорема 1 является частным случаем следующего более сильного утверждения.

Теорема 2. Пусть $a \in C$ — фиксированная точка, $G \subset C \setminus \{a\}$ — тонко открытое множество, тонкая граница которого не является полярным множеством, Q — множество, которое содержится в CG , содержит точки $z_1 := a$ и $z_2 := \infty$, но не содержит никаких неполярных компактов. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$, $f: G \rightarrow C$ — тонко голоморфная в G функция, ограниченная на каждой части множества G , отделимой от точек $z_1 = a$ и $z_2 = \infty$, и удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G}} |f(\zeta)| \leq \mu(|z - a|) \quad \forall z \in (\partial_f G) \setminus Q. \quad (7)$$

Предположим, что при каждом $s = 1, 2$ (независимо друг от друга) для каж-

дой тонко связной компоненты G_j множества G , для которой $z_s \in b(G_j)$, выполняется неравенство (3), а если $z_s \notin b(CG_j)$, то предположим дополнительно, что при $z_s = a$ выполняется (4), а при $z_s = \infty$ — (5).

Пусть $W_0 = \{w \in G : f(w) = 0\}$. Предположим, что для каждой точки $w \in W_0$ существует (обычная) окрестность $V(w)$ такая, что функция $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{k(f, w)}}$ ограничена в $(V(w) \cap G) \setminus \{w\}$.

Тогда для каждой тонко связной компоненты G_j или $f(\zeta) = 0$ в G_j , или при каждом $s = 1, 2$, при котором $\sigma^s = -\infty$, $z_s \in b(CG_j)$, $g_G(z_s, \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in G_j$ и

$$|f(\zeta)| \leq \mu(|\zeta - a|) \exp \left[- \sum_{w \in W_0} k(f, w) g_G(w, \zeta) + \sum_{s: z_s \in b(CG_j)} \sigma^s g_G(z_s, \zeta) \right] \quad \forall \zeta \in G_j. \quad (8)$$

Поведение тонко голоморфных функций возле своих нулей характеризуется следующим свойством [8] (п. 4.3).

Утверждение 1. Тонко голоморфная функция f , определенная в тонкой области D и отличная от постоянной, может иметь не более счетного числа нулей. Каждый нуль d тонко голоморфной функции в тонкой области D имеет конечный порядок $n(d)$, определяемый любым из следующих эквивалентных условий:

- 1) $f^{(k)}(d) = 0$ для $k < n$ и $f^{(n)}(d) \neq 0$;
- 2) существует тонко голоморфная в D функция g такая, что $g(d) \neq 0$ и $f(z) = g(z)(z - d)^n \quad \forall z \in D$.

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем произвольные $q > 0$, $v \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\mu(x) \leq qx^v \quad \forall x > 0. \quad (9)$$

Это возможно, так как $\mu \in \mathcal{M}$.

К множествам G , Q , функции f и мажоранте qx^v применим теорему 2 работы [2]. В результате получим оценку

$$|f(\zeta)| \leq q|\zeta - a|^v \quad \forall \zeta \in G. \quad (10)$$

Введем функцию

$$u(\zeta) := \log |f(\zeta)| + \sum_{w \in W} k(f, w) g_G(w, \zeta),$$

где W — произвольное конечное подмножество множества W_0 . Функция $u(\zeta)$ тонко гипогармонична в G , а во всех точках $z \in b(\partial_f G) \setminus \{a\}$ выполняется условие

$$\overline{\lim}_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G} u(\zeta) \leq \log(q|z - a|^v). \quad (11)$$

Пусть D — произвольная ограниченная часть множества G . Из оценки (10) следует, что функция $u(\zeta)$ ограничена сверху на каждой части множества $D \subset G$, отделимой от множества W .

Пусть $w_i \in W$. На множестве $G \setminus \{w_i\}$ имеем

$$u(\zeta) = \log \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w_i)^{k(f, w_i)}} \right| + k(f, w_i)(\log |\zeta - w_i| + g_G(w_i, \zeta)) + \sum_{w \in W \setminus \{w_i\}} k(f, w) g_G(w, \zeta).$$

Из определения и свойств тонкой функции Грина следует, что сумма $\log |\zeta - w_i| + g_G(w_i, \zeta)$ ограничена сверху на множестве D . Учитывая условия теоремы, получаем, что функция $u(\zeta)$ ограничена сверху возле точки w_i .

Следовательно, функция $u(\zeta)$ ограничена сверху на множестве D .

Из условия (11) следует выполнение условия (2) с точкой $z_1 = a$ теоремы 2 работы [1] относительно функций $\lambda(x) := \log(qx^v)$, $u(\zeta)$ и множеств G, Q . Из условий (3), (5) настоящей теоремы и конечности множества W следует выполнение для функции $u(\zeta)$ условия (1) с точкой $z_2 = \infty$ теоремы 2 работы [1]. Учитывая ограниченность сверху функции $u(\zeta)$ на произвольной ограниченной части D множества G , получаем, что для функций $u(\zeta)$, $\lambda(x) = \log(qx^v)$ и множеств G, Q справедлива теорема 2 работы [1]. При этом исключительный случай указанной теоремы невозможен, так как множество $\partial_f G$ не полярно. Поэтому выполняется соотношение

$$u(\zeta) \leq \log(q|\zeta - a|^v) \quad \forall \zeta \in G. \quad (12)$$

Зафиксируем произвольную точку $\zeta_0 \in G$. Обозначим через $G(\zeta_0)$ тонко связную компоненту множества G , содержащую ζ_0 .

Вначале примем, что $\mu \in \mathbb{M}^*$. Если $x_\mu^- < |\zeta_0 - a| < x_\mu^+$, то можно выбрать $q > 0$, $v \in \mathbb{N}$ такие, что выполняется (9) и $\mu(|\zeta_0 - a|) = q|\zeta_0 - a|^v$. Отсюда и из (12) следует оценка

$$u(\zeta_0) \leq \log \mu(|\zeta_0 - a|). \quad (13)$$

Если же $|\zeta_0 - a| \notin (x_\mu^-, x_\mu^+)$, то за счет выбора $q > 0$, $v \in \mathbb{N}$ можно добиться того, что число $q|\zeta_0 - a|^v$ станет меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, а условие (9) сохранится. Поэтому из выполнения (12) в G следует $u(\zeta_0) = -\infty$, и для всех $\zeta \in G$, для которых $|\zeta - a| \notin (x_\mu^-, x_\mu^+)$, $u(\zeta) = -\infty$. Отсюда и из (13) получаем

$$|f(\zeta)| \exp \left[\sum_{w \in W} k(f, w) g_G(w, \zeta) \right] \leq \mu(|\zeta - a|) \quad \forall \zeta \in G. \quad (14)$$

Если же $\mu \equiv 0$, то для любых $q > 0$, $v \in \mathbb{N}$ выполняется (9), откуда следует соотношение (13) для любого $\zeta_0 \in G$, а также (14) (для указанного μ).

Следовательно, доказано, что при условиях теоремы 2 всегда имеет место оценка (14). Из (14) с учетом определений следуют оценки $-\infty \leq \sigma^1 \leq 0$, $-\infty \leq \sigma^2 \leq 0$.

Возьмем два числа τ_1, τ_2 такие, что при каждом из значений $s = 1, 2$ (независимо друг от друга) или $\tau_s = \sigma^s = 0$, или $\tau_s \in (\sigma^s, 0]$. Зафиксируем произвольные $\sigma > 0$, $v \in \mathbb{N}$, для которых выполняется (9). Согласно доказанному выше

$$u(\zeta) \leq \log(\sigma|\zeta - a|^v) \quad \forall \zeta \in G. \quad (15)$$

Обозначим

$$V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta) := u(\zeta) - \log(\sigma|\zeta - a|^v) - \tau_1 g_G(a, \zeta) - \tau_2 g_G(\infty, \zeta).$$

Функция $V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta)$ тонко гипогармонична в G и ограничена сверху на любой ограниченной части множества G , отделимой от точки a . Кроме того, во всех точках $z \in b(\partial_f G) \setminus \{a\}$ имеем

$$\overline{\lim}_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G} V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta) \leq 0.$$

Обозначим (как в работе [1])

$$u_G^a := \begin{cases} \overline{\lim}_{z \rightarrow a, z \in G} \frac{u(z)}{|\log|z - a||} & \text{при } a \in \partial_f G; \\ 0 & \text{при } a \notin \partial_f G, \end{cases}$$

$$u_G^\infty := \begin{cases} \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty, z \in G} \frac{u(z)}{\log|z|} & \text{при } \infty \in \bar{\partial}_f G; \\ 0 & \text{при } \infty \notin \bar{\partial}_f G. \end{cases}$$

Для каждого $w \in W$ и каждого $\delta > 0$ существует конечная постоянная m такая, что при всех $|\zeta - w| > \delta$ ($\zeta \in G$) выполняется $g_G(w, \zeta) \leq m$. Отсюда с учетом конечности множества W получаем $u_G^a \leq f_{u, G}$, $u_G^\infty \leq f_{\infty, G}$.

Существуют конечные постоянные c_1, c_2 такие, что при $|\zeta - a| \geq 1$ выполняются неравенства $g_G(a, \zeta) \leq c_1$, $g_G(\infty, \zeta) \leq c_2 + \log|\zeta - a|$. Поэтому с учетом (15) имеем следующее.

Если $\tau_2 = 0$, то

$$V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta) \leq -\tau_1 c_1 \quad \forall \zeta \in G: |\zeta - a| \geq 1.$$

Если же $\tau_2 \in (\sigma^2, 0)$, то при $|\zeta - a| \geq 1$ справедливо

$$V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta) \leq u(\zeta) - \log(\sigma|\zeta - a|^v) - \tau_1 c_1 - \tau_2 (\log|\zeta - a| + c_2) \leq O(1), \quad \zeta \rightarrow \infty,$$

так как или $u_G^\infty = f_{\infty, G} = -\infty$ и $u(\zeta) < (v + \tau_2) \log|\zeta - a|$ при всех достаточно больших $|\zeta|$ (таких, что $\zeta \in G$), или $u_G^\infty \neq -\infty$, $\mu_\infty \neq -\infty$ и при всех достаточно больших $|\zeta|$ на основании (1) имеет место

$$\begin{aligned} u(\zeta) - (v + \tau_2) \log|\zeta - a| &< (u_G^\infty - v - \sigma^2) \log|\zeta - a| \leq (f_{\infty, G} - v - \sigma^2) \log|\zeta - a| = \\ &= (\mu_\infty - v) \log|\zeta - a| \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta)$ ограничена сверху при всех $\zeta \in G: |\zeta - a| \geq 1$.

Существуют конечные постоянные c_3, c_4 такие, что при $0 < |\zeta - a| \leq 1$ $g_G(\infty, \zeta) \leq c_3$, $g_G(a, \zeta) \leq c_4 - \log|\zeta - a|$. Поэтому по аналогии с доказанным выше имеем следующее.

Если $\tau_1 = 0$, то

$$V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta) \leq -\tau_2 c_3 \quad \forall \zeta \in G: |\zeta - a| \in (0, 1].$$

Если же $\tau_1 \in (\sigma^1, 0)$, то при $0 < |\zeta - a| \leq 1$ справедливо

$$V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta) \leq u(\zeta) - \log(\sigma|\zeta - a|^v) - \tau_1(-\log|\zeta - a| + c_4) - \tau_2 c_3 \leq O(1), \quad \zeta \rightarrow 0,$$

так как или $u_G^a = f_{a,G} = -\infty$ и $u(\zeta) < (v - \tau_1)\log|\zeta - a|$ при всех достаточно малых $|\zeta - a|$, или $u_G^a \neq -\infty$, $\mu_0 \neq +\infty$ и при всех достаточно малых $|\zeta - a|$

$$\begin{aligned} u(\zeta) - (v - \tau_1)\log|\zeta - a| &< (-u_G^a - v + \sigma^1)\log|\zeta - a| \leq \\ &\leq (-f_{a,G} - v + \sigma^1)\log|\zeta - a| = (\mu_0 - v)\log|\zeta - a| \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta)$ ограничена сверху также при всех $0 < |\zeta - a| \leq 1$.

Следовательно, функция $V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta)$ ограничена сверху в G и поэтому на основании принципа максимума для тонко гипогармонических функций [6, с. 76] получаем

$$V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta) \leq 0 \quad \forall \zeta \in G,$$

т. е.

$$u(\zeta) \leq \log(\sigma|\zeta - a|^v) + \tau_1 g_G(a, \zeta) + \tau_2 g_G(\infty, \zeta) \quad \forall \zeta \in G.$$

Устремляя τ_s к σ^s для $s = 1, 2$, при граничном переходе получаем

$$u(\zeta) \leq \log(\sigma|\zeta - a|^v) + \sigma^1 g_G(a, \zeta) + \sigma^2 g_G(\infty, \zeta) \quad \forall \zeta \in G \quad (16)$$

(здесь если $g_G(a, \zeta) = 0$, то $\sigma^1 g_G(a, \zeta) = 0$ (даже при $\sigma^1 = -\infty$), а если $g_G(\infty, \zeta) = 0$, то $\sigma^2 g_G(\infty, \zeta) = 0$ (даже при $\sigma^2 = -\infty$)).

Если при некотором $\zeta_0 \in G$ выполняется условие

$$\sigma^1 g_G(a, \zeta_0) + \sigma^2 g_G(\infty, \zeta_0) = -\infty \quad (17)$$

(равносильное тому, что при каком-то $s = 1, 2$ верно $\sigma^s = -\infty$ и $z_s \notin b(CG(\zeta_0))$), то имеем

$$u(\zeta) = -\infty \quad \forall \zeta \in G(\zeta_0).$$

Отсюда, учитывая определение функции $u(\zeta)$, получаем

$$f(\zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in G(\zeta_0).$$

Если же условие (17) не выполняется, то при каждом $s = 1, 2$, при котором $\sigma^s = -\infty$, должно быть $z_s \in b(CG(\zeta_0))$ и $g_G(z_s, \zeta) = 0$ в $G(\zeta_0)$.

Пусть $\mu \in \mathbb{M}^*$ и $\zeta_0 \in G$. Если же $x_\mu^- < |\zeta_0 - a| < x_\mu^+$, то можно выбрать $\sigma > 0$, $v \in \mathbb{N}$ такие, что выполняется (9) и

$$\mu(|\zeta_0 - a|) = \sigma|\zeta_0 - a|^v.$$

Отсюда и из (16) следует неравенство

$$|f(\zeta_0)| \leq \mu(|\zeta_0 - a|) \exp \left[- \sum_{w \in W} k(f, w) g_G(w, \zeta_0) + \sum_{s: z_s \notin b(CG(\zeta_0))} \sigma^s g_G(z_s, \zeta_0) \right] \quad \forall \zeta_0 \in G. \quad (18)$$

Если же $|\zeta_0 - a| \notin (x_\mu^-, x_\mu^+)$, то, как показано выше, $f(\zeta_0) = 0$.

Таким образом, вследствие произвольности выбора множества $W \subset W_0$ из (18) следует справедливость оценки (8) для любого $\zeta \in G$.

Теорема 2, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

1. Тамразов П. М., Сарана А. А. Контурно-телесные свойства тонко гипогармонических функций // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1114–1125.
2. Тамразов П. М., Сарана А. А. Контурно-телесные свойства тонко голоморфных функций // Там же. – 1998. – **50**, № 5. – С. 712–723.
3. Тамразов П. М. Усиленные контурно-телесные результаты для субгармонических функций // Там же. – 1988. – **40**, № 2. – С. 210–219.
4. Тамразов П. М. Контурно-телесные результаты для голоморфных функций // Изв. АН СССР. – 1986. – **50**, № 4. – С. 835–848.
5. Алиев Т. Г., Тамразов П. М. Мероморфные функции в контурно-телесной задаче с учетом нулей и неоднолистности. – Киев, 1985. – 12 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.46).
6. Fuglede B. Finely harmonic functions // Lect. Notes Math. – 1972. – № 289. – 188 p.
7. Fuglede B. Sur la fonction de Green pour un domaine fin // Ann. Inst. Fourier. – 1975. – **25**, № 3-4. – P. 201–206.
8. Fuglede B. Finely holomorphic functions. A survey // Rev. roum. math. pures et appl. – 1988. – **33**. – P. 283–295.
9. Fuglede B. Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math. – 1976. – **2**. – P. 113–127.
10. Fuglede B. Value distribution of harmonic and finely harmonic morphisms and applications in complex analysis // Ibid. – 1986. – **11**. – P. 111–136.

Получено 10.10.2000